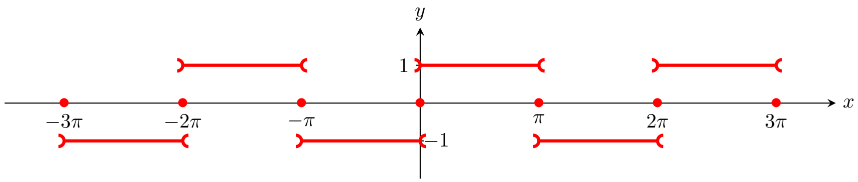
Chapitre 10
Séries de Fourier

Exercice 1 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.

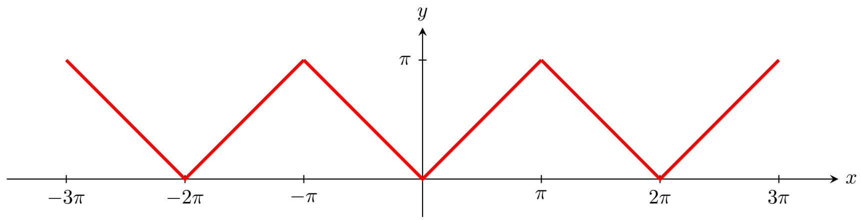


1. Comme la fonction f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a par le calcul
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad b_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}.$$

2. Comme la fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on a par le théorème de Dirichlet que la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f}$ de f qui, par hypothèse dans cet exercice, est f. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)x).$$
En particulier pour $x = \pi/2$, on a
$$1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi}(-1)^p.$$
On en déduit que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}.$$
D'autre part, si on applique le théorème de Parseval, on obtient
$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{(2p+1)\pi}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$
On en déduit que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. La série de terme générale $1/n^2$ est convergente. On peut écrire
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$
On a en passant à la limite
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
De même, la série de terme générale $(-1)^{n+1}/n^2$ est convergente et on a
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+1)^2} = -\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2},$$
donc en passant à la limite
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 2 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.

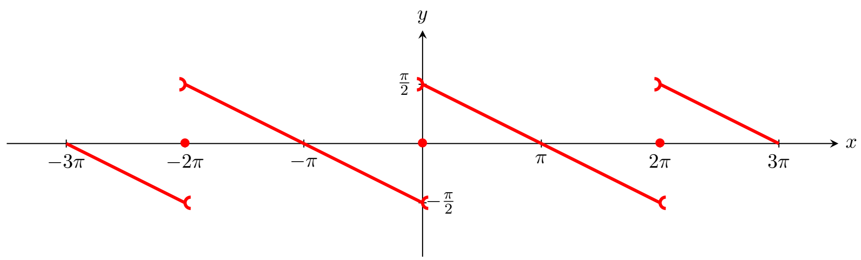


1. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on a par le calcul
$$a_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p-1} = -\frac{4}{(2p-1)^2\pi}.$$

2. Comme la fonction f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f} = f$ d'après le théorème de Dirichlet. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi} \cos((2p+1)x).$$
En particulier pour $x = 0$, on a
$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2p+1)^2\pi}$$
donc
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
D'autre part, si on applique le théorème de Parseval, on obtient
$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{-4}{(2p+1)^2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}.\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3. La série de terme générale $1/n^2$ est convergente. On peut écrire
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$
On a en passant à la limite
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
De même, la série de terme générale $1/n^4$ est convergente et on a
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^4} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^4} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^4},$$
donc en passant à la limite
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



1. Comme la fonction f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a par le calcul
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

2. Comme la fonction f est continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique et on obtient

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

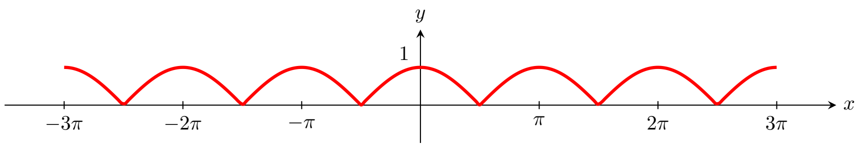
3. Comme la fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f}$ de f d'après le théorème de Dirichlet. Comme $\tilde{f} = f$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, on a $f(\theta) = (\pi - \theta)/2$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Exercice 4 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



1. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)| = f(x),$$

donc la fonction f est π-périodique.

2. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on a par le calcul

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}4}{(4n^2-1)\pi}.$$

3. Comme la fonction f est π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f} = f$ d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(x)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}4}{(4n^2-1)\pi}\cos(2nx).$$

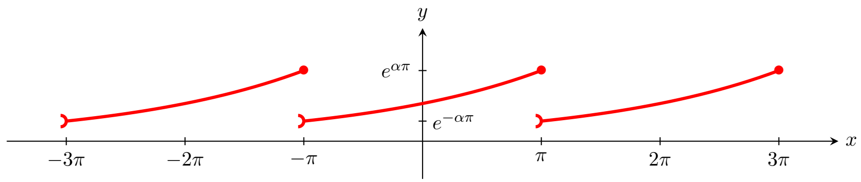
En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}4}{(4n^2-1)\pi},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Exercice 5 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



1. On a par le calcul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi\alpha}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n\alpha(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2+n^2)},$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}n(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2+n^2)}.$$

2. Comme la fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la régularisée $\tilde{f}$ d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \alpha(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2 + n^2)},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{2\alpha\pi}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - 1\right).$$

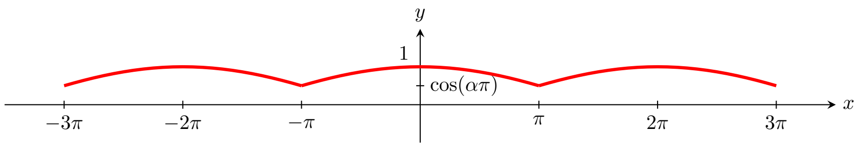
De même, pour $x = \pi$, on trouve

$$\frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{2} = \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\pi(\alpha^2 + n^2)},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\alpha\pi \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - 1\right).$$

Exercice 6 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



1. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le calcul

$$a_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

2. Comme la fonction f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)} \cos(nx).$$

En particulier pour $x = 0$, on a

$$1 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} - 1\right).$$

De même, pour $x = \pi$, on trouve

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2 - \alpha^2)} (-1)^n,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1 - \alpha\pi \text{cotan}(\alpha\pi)}{2\alpha^2}.$$

3. Pour $x = \pi$, on obtient

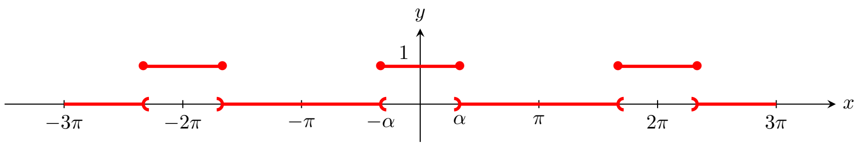
$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

En posant $\alpha = x/\pi$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, on obtient

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x \sin(x)}{x^2 - (n\pi)^2},$$

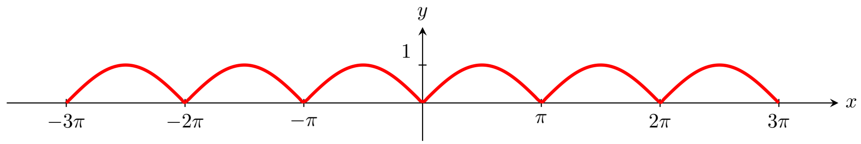
ce qui donne le résultat en divisant par $\sin(x)$.

Exercice 7 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



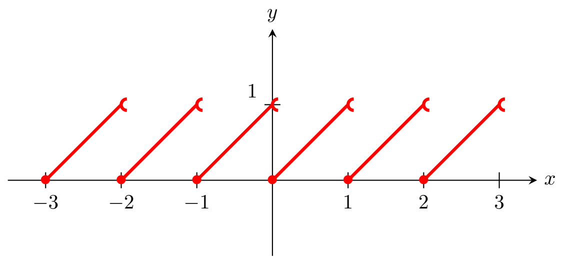
1. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le calcul
$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}.$$
2. Comme la fonction f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}\cos(nx).$$
En particulier pour $x = 0$, on a
$$1 = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}.$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$
D'autre part, si on applique le théorème de Parseval, on obtient
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}\right)^2,$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha n)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Exercice 8 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



La fonction $f : x \mapsto |\sin(x)|$ est continue et π-périodique. Comme elle est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le calcul
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}.$$
Comme la fonction f est π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}\cos(2nx).$$
En prenant $x = 0$, on trouve
$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)}.$$
Ainsi, en utilisant cette relation, on obtient
$$|\sin(x)| = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)}(1 - \cos(2nx)).$$
Finalement, comme $1 - \cos(2nx) = 2\sin^2(nx)$, on obtient le résultat.

Exercice 9 : On commence par tracer le graphique de la fonction f.



On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité

$$f(x+1) = x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = f(x),$$

donc f est 1-périodique.

On a par le calcul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{1}{\pi n}.$$

Comme la fonction f est 1-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet. De plus, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}.$$

Exercice 10 :

1. Avec une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}[f(t)\cos(nt)]_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \\ &= nb_n(f). \end{aligned}$$

De même, on a $b_n(f') = -na_n(f)$.

2. On commence par remarquer que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0.$$

Comme la fonctions f est 2π-périodique et continue, on a par le théorème de Parseval

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{2\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2$$

On peut majorer, puis utiliser les égalités de la question précédente

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &\leqslant \frac{2\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-na_n(f))^2 + (nb_n(f))^2 \\ &\leqslant 2\pi\left(a_0(f')^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f'))^2 + (b_n(f'))^2\right) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f' qui est continue, on obtient finalement

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt.$$

3. On a égalité si et seulement si $|a_n(f)| = |na_n(f)|$ et $|b_n(f)| = |nb_n(f)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que l'on a égalité si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad a_n(f) = b_n(f) = 0.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, le théorème de Dirichlet s'applique, et la condition ci-dessus équivaut à

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$$